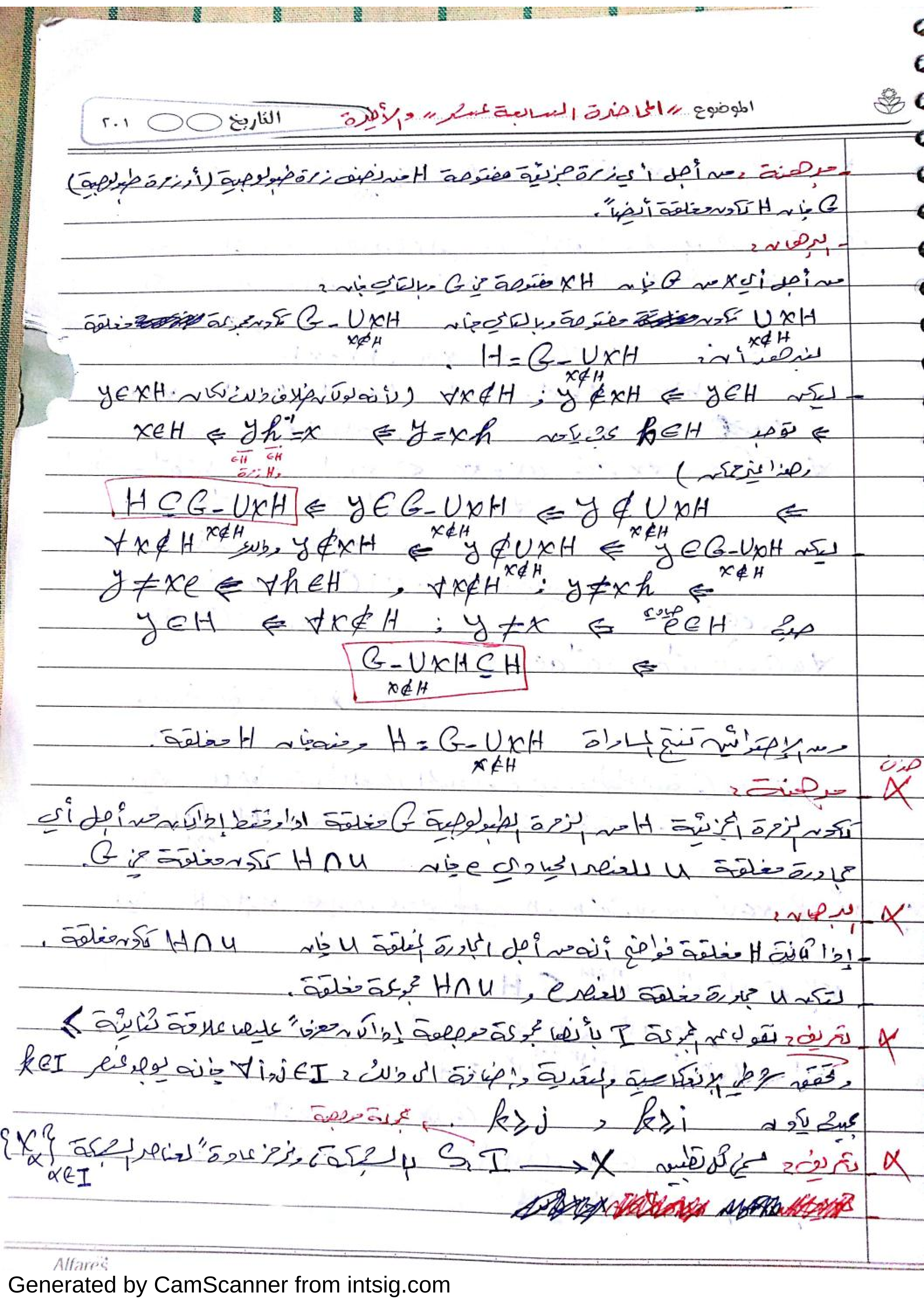


الموضوع «المحاضرة السابعة عشر» والأخيرة   التاريخ   ٢٠١

- مبرهنة: من أجل أي زمرة جزئية مفتوحة H من زمرة طبولوجية (أو زمرة طوبولوجية) G فإن H تكون مغلقة أيضاً.

- البرهان:

من أجل أي x من G فإن xH مفتوحة في G وبالتالي فإن:

$\bigcup_{x\notin H} xH$ تكون مفتوحة وبالتالي فإن $G-\bigcup_{x\notin H} xH$ تكون مجموعة مغلقة

لنبرهن أن: $H=G-\bigcup_{x\notin H} xH$.

- ليكن $y\in H \Leftarrow y\notin xH \; ; \forall x\notin H$ (لأنه لو كان بالخلاف ذلك لكان $y\in xH$

⇐ يوجد $h\in H$ بحيث يكون $y=xh \Leftarrow yh^{-1}=x \Leftarrow x\in H$ (∈H ∈H لأنها زمرة H)

وهذا تناقض)

⇐ $y\notin\bigcup_{x\notin H} xH \Leftarrow y\in G-\bigcup_{x\notin H} xH \Leftarrow H\subseteq G-\bigcup_{x\notin H} xH$

- ليكن $y\in G-\bigcup_{x\notin H} xH \Leftarrow y\notin\bigcup_{x\notin H} xH \Leftarrow y\notin xH$ وذلك $\forall x\notin H$

⇐ $\forall x\notin H : y\neq xh \; , \; \forall h\in H \Leftarrow y\neq xe$

حيث $e\in H$ (العنصر الحيادي) ⇐ $\forall x\notin H ; y\neq x \Leftarrow y\in H$

⇐ $G-\bigcup_{x\notin H} xH\subseteq H$

ومن الاحتوائين ننتج المساواة $H=G-\bigcup_{x\notin H} xH$ ومنه فإن H مغلقة.

- مبرهنة: تكون الزمرة الجزئية H من الزمرة الطبولوجية G مغلقة إذا وفقط إذا كان من أجل أي مجاورة مغلقة U للعنصر الحيادي e فإن $H\cap U$ تكون مغلقة في G.

- البرهان:

- إذا كانت H مغلقة فواضح أنه من أجل المجاورة المغلقة U فإن $H\cap U$ تكون مغلقة.

لتكن U مجاورة مغلقة للعنصر e، و $H\cap U$ مجموعة مغلقة.

- تعريف: نقول عن مجموعة I بأنها مجموعة موجهة إذا كان معرفاً عليها علاقة ثنائية $\geq$ وتحقق شرطي الانعكاسية والتعدية وإضافة إلى ذلك: إذا $\forall i,j\in I$ فإنه يوجد عنصر $k\in I$ بحيث يكون $k\geq i$ ، $k\geq j$. ← مجموعة موجهة

- تعريف: يسمى كل تطبيق $S: I\longrightarrow X$ بالشبكة ونرمز عادة لعناصر الشبكة $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$



X - **ملاحظة:** تكون الشبكة $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ في A متقاربة من النقطة x في الفضاء الطبولوجي X

تعريف: لتكن G زمرة جبرية، إن المجموعة C المؤلفة من جميع العناصر $a\in G$ التي تكون تبادلية مع أي عنصر $x\in G$ تدعى مركز G، ونلاحظ أنه إذا كان $a,b\in C$ فإن:

$\forall x\in G;\ ax=xa\ ,\ bx=xb$ (حسب التعريف)

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$$

ومنه فإن $ab\in C$.

$$\forall a\in C \Leftrightarrow \forall x\in G: ax=xa \Leftrightarrow \forall x^{-1}\in G^{-1}: x^{-1}a^{-1}=a^{-1}x^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in G;\ xa^{-1}=a^{-1}x \Leftrightarrow a^{-1}\in C$$

لأن $G^{-1}=G$.

ومنه نستنتج أن C (G/C) زمرة جزئية من G.

كما أن C زمرة ناظمية لأن: $c\in C$,

$$\forall a\in G;\ a^{-1}ca = a^{-1}ac = ec = c$$

ومنه نستنتج أن C زمرة ناظمية.

مبرهنة:

ليكن U جوار متناظر للعنصر الحيادي e في زمرة طبولوجية G، عندئذٍ فإن: $H=\bigcup_{n\geq 1} U^n$ تكون زمرة جزئية مفتوحة ومغلقة في G.

البرهان:

ليكن $x,y\in H$ $\Leftarrow$ يوجد عددين طبيعيين n, m بحيث يكون: $x\in U^n$ & $y\in U^m$

ومنه فإن:

$$xy \in U^nU^m = U^{n+m} \subseteq H$$

ليكن $x\in H$ $\Leftarrow$ يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون $x\in U^n$ ومنه:

$$x^{-1} \in (U^n)^{-1} = (U^{-1})^n \overset{\text{لأنه متناظرة}}{=} U^n \subseteq H$$

ومنه نستنتج أن H زمرة جزئية من G.

لنبرهن أن H مفتوحة: من أجل أي $y\in H$ فإن:

$$y \in yU \subseteq yH \subseteq H$$

أي أن H مجاورة لأي نقطة من تقاطعها (لأن U لا مجاورة لـ e) فهي مجموعة مفتوحة
بما أن H زمرة جزئية مفتوحة حسب المبرهنة الأخيرة تكون H مغلقة.

مبرهنة:

من أجل أي جوار للعنصر الحيادي e في زمرة طبولوجية مترابطة G تكون $G=\bigcup_{n\geq1} U^n$
بكلمة أخرى كل زمرة طبولوجية مترابطة تكون مولدة بجوار لعنصرها الحيادي ، لكن العكس غير صحيح.

البرهان:

من المبرهنة الأولى في فقرة الطبولوجية نستنتج أنه يمكن إيجاد مجاورة $V \subseteq U$ للعنصر الحيادي e بحيث تكون تناظرية ومن المبرهنة الأخيرة نجد أن
$\bigcup_{n\geq1} V^n$ تكون زمرة جزئية مفتوحة ومغلقة في G.
وبما أن G فضاء طبولوجي مترابط فإن المجموعة الوحيدة المفتوحة والمغلقة في آن واحد هما
$\emptyset$ و G.
ومنه ينتج أن: $G=\bigcup_{n\geq1} V^n$ (ولا تساوي $\emptyset$ لأنها تحوي الحيادي على الأقل).
ومنه ينتج أن:
$$G=\bigcup_{n\geq1} U^n$$
لكن العكس غير صحيح أي أنه يمكن إيجاد زمرة مولدة بجوار لعنصرها الحيادي لكنها غير مترابطة ،
فإذا أخذنا الزمرة الجمعية Q مع الطبولوجية المولدة على Q من الطبولوجية العادية على R.
من المعروف أن Q غير مترابطة ، لكن كل مجاورة تناظرية U للعنصر 0 في Q تولد Q
(صحيح لمجاورة المتناظرة في Q هي أثر المجاورة المتناظرة على R)

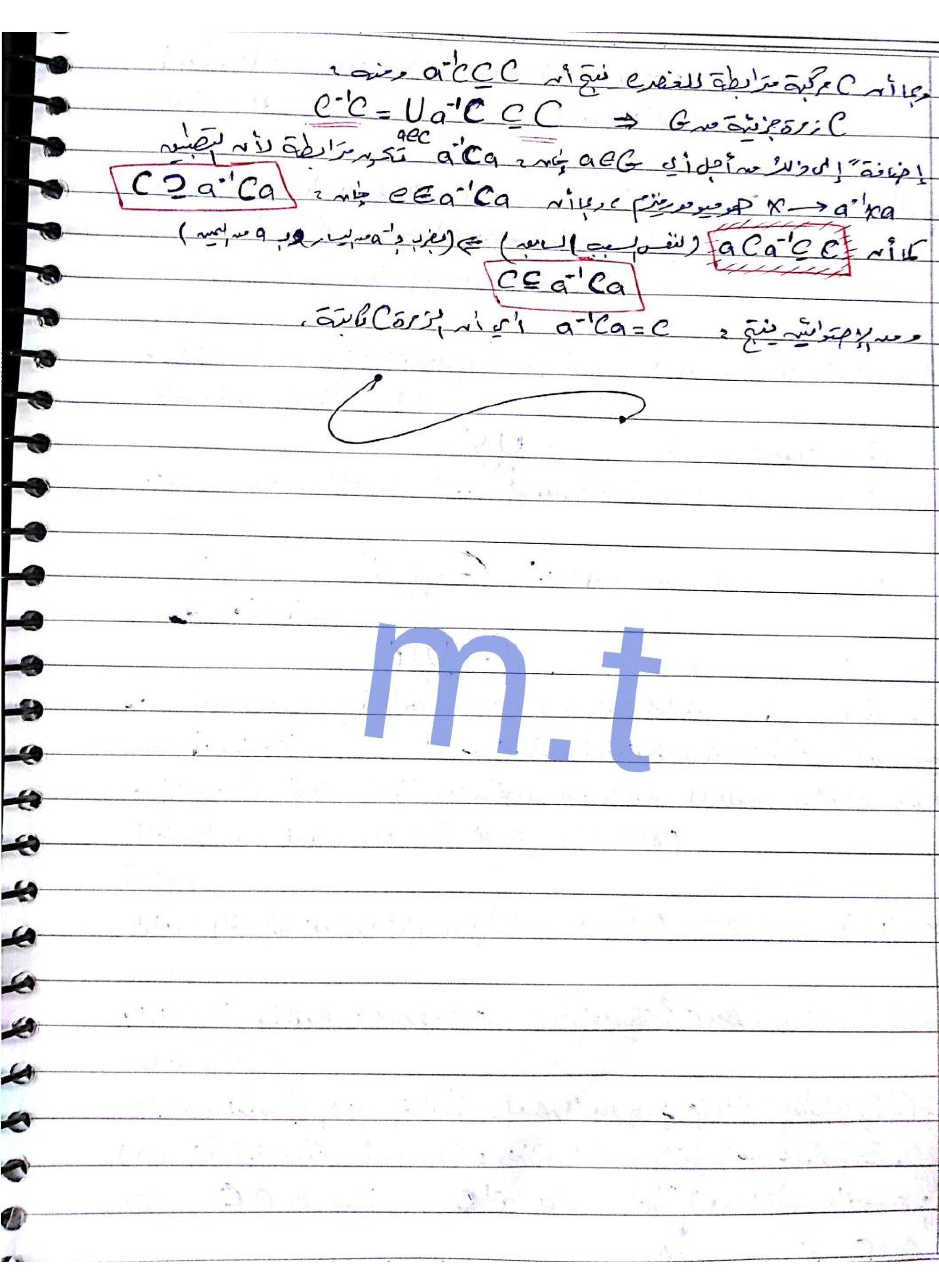
تعريف:

المركبة المترابطة للعنصر x في الفضاء الطبولوجي X هي أكبر مجموعة جزئية مترابطة تحوي x .

مبرهنة:

المركبة المترابطة للعنصر الحيادي e في زمرة طبولوجية G تكون زمرة جزئية منها مغلقة وناظمية.

البرهان: لتكن C المركبة المترابطة من العنصر الحيادي e في الزمرة الطبولوجية G فهي مغلقة
(لأن المركبة المترابطة دوماً مغلقة) ، ولنبرهن أنها زمرة جزئية من G ناظمية.
لتكن $a \in C$ عندئذٍ فإن $a^{-1}C$ تكون مترابطة (لأن التطبيق $f_{a^{-1}}: x \longrightarrow a^{-1}x$ هوميومورفيزم)
وتحوي e
$f_{a^{-1}}(C)=a^{-1}C$



وبما أن C مركبة مترابطة للعنصر e ينتج أن $a^{-1}C \subseteq C$ ومنه ،

C زمرة جزئية من G $\Rightarrow$ $C^{-1}C = \bigcup_{a \in C} a^{-1}C \subseteq C$

إضافة إلى ذلك من أجل أي $a \in G$ فإن ، $a^{-1}Ca$ تكون مترابطة لأن التطبيق

$x \longrightarrow a^{-1}xa$ هوميومورفيزم ، وبما أن $e \in a^{-1}Ca$ فإن ، $C \supseteq a^{-1}Ca$

كما أن $aCa^{-1} \subseteq C$ (للنفس السبب السابق) $\Rightarrow$ (بالضرب بـ a^{-1} من اليسار وبـ a من اليمين)

$C \subseteq a^{-1}Ca$

ومن الاحتوائين ينتج ، $a^{-1}Ca = C$ أي أن الزمرة C ثابتة.